第 26 講　指数関数・対数関数(2)

【基礎確認事項】

[1]　対数の概念

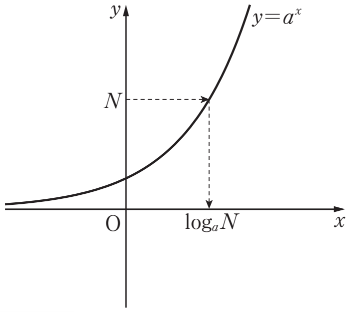
□$a>0$, $a\neq 1$ のとき，指数関数 $y=a^x$ に対して，任意の正の数 N に対して

$N=a^x$

を満たす実数 x がただ1つ定まる．その x を

$\log_a N$

と表し，a を底とする N の**対数**という．
また，N をこの対数の**真数**という．



$a>0$, $a\neq 1$, $N>0$ のとき　$N=a^x \iff x=\log_a N$

以下，$\log_a N$ においては，$a>0$, $a\neq 1$, $N>0$ であるとする．

例　$\log_3 81$ は，3 を底とする指数関数 $y=3^x$ で $y=81$ となるときの x である．つまり「3 を何乗すると 81」になるかを考えることで，それが「4」であるとわかる．つまり，$\log_3 81=\log_3 3^4=4$ である．

指数を考えることにより，次のことが成り立つ．

$\log_a 1=0$　$(\iff a^0=1)$　　$\log_a a=1$　$(\iff a^1=a)$　　$\log_a a^p=p$

□また，$\log_a M=\alpha$, $\log_a N=\beta$ とすると，$M=a^\alpha$, $N=a^\beta$ である．よって指数法則より
$MN=a^\alpha\times a^\beta=a^{\alpha+\beta}$ であるから，$\log_a MN=\alpha+\beta=\log_a M+\log_a N$
次の対数の性質が成り立ち，上と同様に証明できる．

M, N を正の実数，p を実数とする．

$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　（積の対数＝対数の和）

$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　（商の対数＝対数の差）

$\log_a M^p=p\log_a M$　（p 乗の対数＝対数の p 倍）

□対数の値を計算したり，その性質を調べる際に，底を別の数に変えた方がよい場合がある．
次の公式を導くことができる．

＜底の変換公式＞

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

この公式が成り立つことを示す．

$\log_a b=p$ とすると　$b=a^p$

対数の相等（後述）より　$\log_c b=\log_c a^p$　つまり　$\log_c b=p\log_c a$

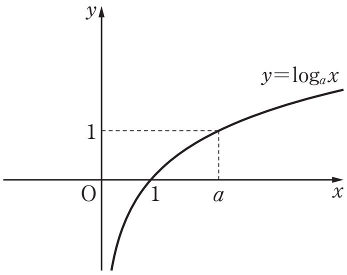
$a\neq 1$ より　$\log_c a\neq 0$　よって　$p=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

したがって　$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ である．

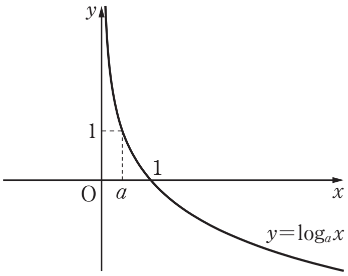
⇒　C&U ①②

［2］ 対数関数とそのグラフ

□ a を1とは異なる正の定数とするとき，実数 x に $\log_a x$ を対応させることによって関数 $y=\log_a x$ が得られる．この関数を，a を底とする x の**対数関数**という．



$a>1$ のとき



$0<a<1$ のとき

いずれも y 軸を漸近線にもち，$(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る．また，次のことが成り立つ．

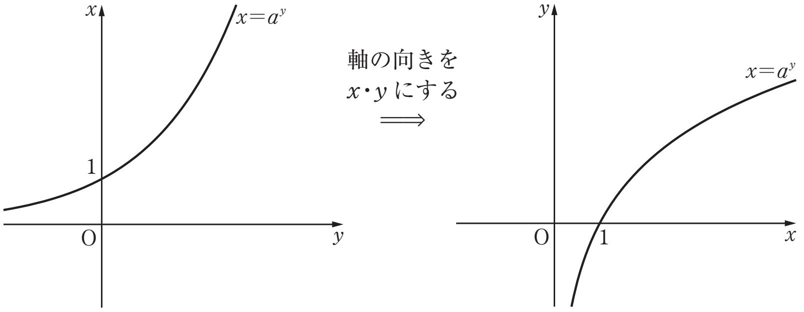
① $a>1$ のとき　$x_1<x_2 \iff \log_a x_1<\log_a x_2$ であり，a^x は増加関数

② $0<a<1$ のとき　$x_1<x_2 \iff \log_a x_1>\log_a x_2$ であり，a^x は減少関数

③ $a>0$，$a\neq 1$ のとき　$x_1=x_2 \iff \log_a x_1=\log_a x_2$　（対数の相等）

⇒　C&U ③④

$y=a^x$ のグラフにおいて，y と x を入れ替えた $x=a^y$ のグラフを考える．



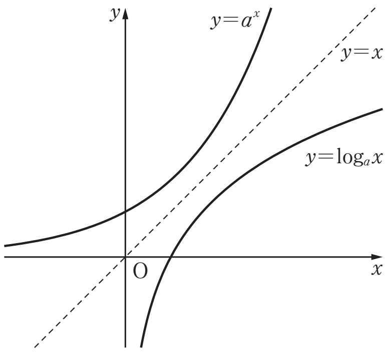
このグラフは $y=\log_a x$ と一致する．これは

$y=\log_a x \iff x=a^y$

であることからもわかる．

□指数関数 $y=a^x$ のグラフと対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは，$y=x$ に関して対称である．

また，指数関数 $y=a^x$ と対数関数 $y=\log_a x$ はともに増加関数または減少関数である．よっていずれの関数も x と y の値は1：1に対応する．



【CHECK & UP】

1　次の式の値を求めよ．

(1)　$\log_3 81$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}$

2　次の式を簡単にせよ．

(1)　$\log_2 24-\log_2 \dfrac{9}{4}+\log_2 6$　　(2)　$\log_4 3\cdot\log_9 25\cdot\log_5 8$

3　次の関数のグラフの概形をかけ．

(1)　$y=\log_2 x$　　(2)　$y=\log_2 x+1$　　(3)　$y=\log_2(x-2)$

4　次の方程式・不等式を解け．

(1)　$\log_3 x=2$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}} x\geqq 3$

＜ Note ＞

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

1　(1)　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)$ の式の値を求めよ．

(2)　$16^{\log_2 3}$　の値を求めよ．

< Note >

2 次の方程式，不等式を解け．

(1) $\log_3 x - \log_9(x+2) = 0$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geqq \log_{\frac{1}{2}} 2x$

(3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$

(4) $(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3 < 0$

< Note >

3　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)$　$(2\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$　$(0\leqq x\leqq 3)$

＜ Note ＞

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

(1)　$2^{2\log_4 3}=$ [ア] である.

(2)　$(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^2-3=0$ の解は　$x=$ [イウエオ], $\dfrac{[カ]}{[キク]}$ である.

(3)　$\log_3(2x-1)+\log_3(x+2)\leqq 1$　の解は $\dfrac{[ケ]}{[コ]}<x\leqq$ [サ] である.

(4)　関数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-2x-x^2)$ の最小値は [シス] である.

< Note >

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

【CHECK & UP】

1 (1)　$81=3^4$ より　$\log_3 81=\mathbf{4}$

(2)　$\sqrt{32}=2^{\frac{5}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{2}}$　より　$\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{32}=-\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

> $\log_a b$ は「底 a を何乗すると真数 b になるか」を表している．よって真数が底を何乗したものかがわかればすぐに log の値が出る．その時に指数の知識を活用する必要がある．

2 (1)　$\log_2 24-\log_2\dfrac{9}{4}+\log_2 6$

$=\log_2\left(24\div\dfrac{9}{4}\times 6\right)=\log_2 2^6=\mathbf{6}$

> 対数の法則を使うと，底を同じくする対数の和や差を 1 つの対数にまとめることができる．その際に真数部分は積や商の計算となる．逆に，真数部分を積や商で表し，これを複数の対数に分けていく方法も考えられる．問題によって使い分けが必要である．

(2)　$\log_4 3\cdot\log_9 25\cdot\log_5 8$

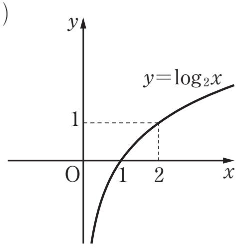
$=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}\cdot\dfrac{\log_2 25}{\log_2 9}\cdot\dfrac{\log_2 8}{\log_2 5}$

$=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 2^2}\cdot\dfrac{\log_2 5^2}{\log_2 3^2}\cdot\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 5}$

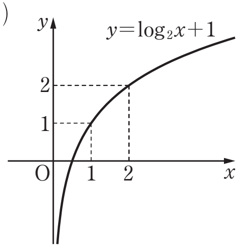
$=\dfrac{\log_2 3}{2}\cdot\dfrac{2\log_2 5}{2\log_2 3}\cdot\dfrac{3}{\log_2 5}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$

> 底が異なる場合は，「底の変換公式」によって底を揃えるとよい．左は底を 2 に揃えた解法である．
> ただし，対数の和，差ではなく積，商である．よってこの形から 1 つの対数にまとめていくことはできない．したがって，それぞれの対数についてその真数を積・商で表して複数の対数に分けたり，$\log_a M^p=p\log_a M$ を利用して真数の指数部分の数字を前に出していく必要が出てくる．1 つにまとめていくこととは逆行するような感覚ではあるが，上記のように問題を通じて使い分けができるようにしていこう．

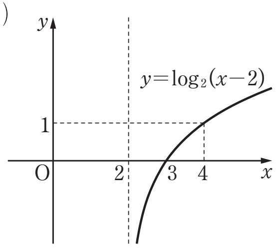
3 (1)



(2)



(3)



> 対数関数 $y=\log_a x$ は，指数関数同様，$a>1$ のとき単調増加，$0<a<1$ のとき単調減少する．しかしながら指数関数とは異なり，$a>1$ のときは累乗計算により関数の値の増加の幅はだんだん小さくなっていく．
> (2)は(1)のグラフを y 軸方向に 1 平行移動したもので，グラフの形状は(1)とさほど変わらない．
> (3)は(1)のグラフを x 軸方向に 2 平行移動したもので，漸近線が $x=2$ となっている．(1)の漸近線は $x=0$ であるため y 軸と重なって見えない．

4 (1)　$\log_3 x=2$　より　$\boldsymbol{x=3^2=9}$

【別解】　$\log_3 x=2$　より　$\log_3 x=\log_3 3^2$　　よって　$x=3^2=9$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}x\geqq 3$　より　$\log_{\frac{1}{2}}x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

つまり　$\log_{\frac{1}{2}}x\geqq\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{8}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さく，(真数)>0

よって　$\boldsymbol{0<x\leqq\dfrac{1}{8}}$

> 対数方程式，不等式の基本．
> 底を同じくする対数における真数部分の比較となる．しかしこの問題のように左辺は対数，右辺は定数の形となることが非常に多い．
> (1)は対数の定義に従えばよいが，時に【別解】のように，$p=\log_a a^p$ として真数部分を比較することも必要である．
> (2)は不等式．指数不等式同様に底の大きさに注意．

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

1　(1)　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ のとき，$\log_2 x+\log_2 y$，$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)$ の式の値を求めよ．

(2)　$16^{\log_2 3}$　の値を求めよ．

(1)　$x=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ より　$x+y=\sqrt{10}$　　$xy=2$

$\log_2 x+\log_2 y=\log_2 xy=\log_2 2=1$

$\log_{\sqrt{2}}(x^2-xy+y^2)=\dfrac{\log_2(x^2-xy+y^2)}{\log_2\sqrt{2}}=\dfrac{\log_2\{(x+y)^2-3xy\}}{\frac{1}{2}}=2\log_2 4=2\cdot 2=4$

(2)　$16^{\log_2 3}=2^{4\log_2 3}=2^{\log_2 3^4}=3^4=\mathbf{81}$

2　次の方程式，不等式を解け．

(1)　$\log_3 x-\log_9(x+2)=0$　　(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqq\log_{\frac{1}{2}}2x$

(3)　$\log_3 x+2\log_x 3=3$　　(4)　$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2-3<0$

(1)　(真数)>0 より　$x>0$　かつ　$x>-2$　よって　$x>0$

このとき　$\log_3 x-\log_9(x+2)=0$　より　$\log_3 x-\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_3 9}=0$

$\log_3 x-\dfrac{\log_3(x+2)}{2}=0$　　$2\log_3 x=\log_3(x+2)$　　$\log_3 x^2=\log_3(x+2)$

よって　$x^2=x+2$　　$x^2-x-2=0$　　$(x-2)(x+1)=0$　　$x>0$ より　$\boldsymbol{x=2}$

(2)　(真数)>0 より　$3-x>0$　かつ　$2x>0$　よって　$0<x<3$

このとき　$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqq\log_{\frac{1}{2}}2x$　において　底 $\dfrac{1}{2}<1$　より　$3-x\leqq 2x$　　$x\geqq 1$

よって　$\mathbf{1\leqq \boldsymbol{x}<3}$

(3)　底の条件より $x>0$，$x\neq 1$　　これは (真数)>0 を満たす．

このとき　$\log_3 x+2\log_x 3=3$　より　$\log_3 x+2\cdot\dfrac{\log_3 3}{\log_3 x}=3$

つまり　$\log_3 x+\dfrac{2}{\log_3 x}=3$　　$\log_3 x=t$ とおくと　$t+\dfrac{2}{t}=3$　$t^3-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$　　$t=1,\ 2$　つまり　$\log_3 x=1,\ 2$　　したがって　$\boldsymbol{x=3,\ 9}$

(4)　(真数)>0 より　$x>0$

このとき　$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-\log_{\frac{1}{3}}x^2-3<0$　より　$(\log_{\frac{1}{3}}x)^2-2\log_{\frac{1}{3}}x-3\geqq 0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$ とおくと　$t^2-2t-3<0$　　$(t+1)(t-3)<0$　　よって　$-1<t<3$

つまり　$-1<\log_{\frac{1}{3}}x<3$　より $\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}<\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3}$

底 $\dfrac{1}{3}<1$　より　$\boldsymbol{\dfrac{1}{27}<x<3}$　($x>0$ を満たす)

3　次の関数の最大値，最小値を求めよ．

(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)$　$(2\leqq x\leqq 8)$

(2)　$y=\log_2(-x^2+4x+4)$　$(0\leqq x\leqq 3)$

(1)　$y=\left(\log_2\dfrac{x^2}{4}\right)\left(\log_2\dfrac{4}{x}\right)=(\log_2 x^2-\log_2 4)(\log_2 4-\log_2 x)$

$=(2\log_2 x-2)(2-\log_2 x)$

$\log_2 x=t$ とおくと　$2\leqq x\leqq 8$ より　$1\leqq t\leqq 3$

このとき　$y=(2t-2)(2-t)=-2t^2+6t-4=-2\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

よって　**最大値**　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$（$t=\dfrac{3}{2}$　つまり　$x=2\sqrt{2}$　のとき）

最小値 $\boldsymbol{-4}$　（$t=3$　つまり　$x=8$　のとき）

(2)　$X=-x^2+4x+4=-(x-2)^2+8$　とおくと　$0\leqq x\leqq 3$ より　$4\leqq X\leqq 8$

このとき　$y=\log_2(-x^2+4x+4)=\log_2 X$（$4\leqq X\leqq 8$）の

最大値　**3**（$X=8$　つまり　$x=2$ のとき）

最小値　**2**（$X=4$　つまり　$x=0$ のとき）

第 26 講　指数関数・対数関数(2)

(1)　$2^{2\log_4 3}=$ ア である.

(2)　$(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^2-3=0$ の解は　$x=$ イウエオ , $\dfrac{\text{カ}}{\text{キク}}$ である.

(3)　$\log_3(2x-1)+\log_3(x+2)\leqq 1$　の解は　$\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}<x\leqq$ サ である.

(4)　関数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-2x-x^2)$ の最小値は シス である.

(1)　$2^{2\log_4 3}=2^{2\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 4}}=2^{\log_2 3}=\mathbf{3}$

(2)　$(\log_{10}x)^2-\log_{10}x^2-3=0$　より　$(\log_{10}x)^2-2\log_{10}x-3=0$

$\log_{10}x=t$ とおくと　$t^2-2t-3=0$　　$(t-3)(t+1)=0$　　$t=3,\ -1$

つまり　$\log_{10}x=3,\ -1$　　したがって　$x=10^3,\ 10^{-1}$　より　$x=\mathbf{1000},\ \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$

(3)　真数は正より $x>\dfrac{1}{2}$　かつ　$x>-2$　　よって　$x>\dfrac{1}{2}$

このとき　$\log_3(2x-1)+\log_3(x+2)\leqq 1$　より　$\log_3(2x-1)(x+2)\leqq\log_3 3$

底 3 は 1 より大きいので　$(2x-1)(x+2)\leqq 3$　　$2x^2+3x-5\leqq 0$

$(2x+5)(x-1)\leqq 0$　　　$-\dfrac{5}{2}\leqq x\leqq 1$

$x>\dfrac{1}{2}$ より　$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}<x\leqq\mathbf{1}$

(4)　$3-2x-x^2=X$　とおくと　$X=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$　　よって　$X\leqq 4$

このとき　$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}X$　の底 $\dfrac{1}{2}$ が 1 より小さいことからグラフは単調減少.

したがって　$X=4$　つまり　$x=-1$ のとき　最小値　$\log_{\frac{1}{2}}4=\mathbf{-2}$　をとる.